MONTREAL Mai 2001

Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance

Gérard Vergnaud, CNRS, Université Paris 8

Conférence publiée dans les Actes du Colloque GDM-2001
Jean Portugais (Ed)La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation.

Les idées que je vais évoquer aujourd'hui sont issues des leçons que j'ai pu tirer de plusieurs sortes d'expériences : principalement la recherche en psychologie et en didactique des mathématiques, qui m'a occupé pendant 30 années, et l'analyse des compétences des adultes en relation avec les évolutions du travail. J'ai beaucoup appris comme responsable du réseau français de recherche en didactique des mathématiques et de la physique, et comme rapporteur scientifique d'un groupe de travail sur le développement des compétences au sein de l'association ECRIN, qui regroupe des clubs recherche-industrie dans des domaines variés de la physique, de la chimie, des sciences de la vie et des sciences humaines. En 1998 j'ai aussi préparé un rapport pour le Mouvement des Entreprises de France (MEDEF, anciennement CNPF), sur les conditions de mise en œuvre de la démarche compétence.

Le développement des compétences au cours de la formation initiale, de l'expérience, et de la formation continue est un problème de société, pas seulement un problème de didactique. Il est très positif que soit reconnu, aujourd'hui plus qu'hier, l'importance de la forme opératoire de la connaissance, celle qui permet de faire et de réussir. Cela ne dévalue pas la forme prédicative de la connaissance, celle qui prend la forme de textes, d'énoncés, de traités et de manuels, mais cela rend davantage justice aux connaissances acquises au cours de l'expérience. En France tout particulièrement ce n'est pas en raison de leur expérience professionnelle que les directeurs d'entreprise accèdent à leur responsabilité ; ce sont plutôt les grandes écoles dont ils sont sortis qui comptent. Et cette tendance s'est encore accusée au cours des dix dernières années : alors qu'en Allemagne on est passé de 16% à 30 % de chef d'entreprise issus du rang, en France on est tombé de 8% à 4%.

Le développement des compétences est un enjeu essentiel de l'éducation et du travail. Il faut un cadre théorique pour penser cette question et organiser des méthodologies pour la recherche. Son importance est théorique, avec la distinction dialectique que je viens d'évoquer entre forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. Elle est aussi pratique, voire conjoncturelle, dans la mesure où on assiste aujourd'hui à une sorte d'effet de mode□la vague de la démarche compétence dans les entreprises, le mouvement vers des pratiques nouvelles d'évaluation et de certification dans l'éducation et la formation.

Je trouve pour ma part très positif qu'on ne se contente pas d'examiner des productions écrites ou orales pour délivrer des diplômes, et surtout qu'on reconnaisse comme une vraie connaissance les savoir-faire acquis au cours de l'expérience, notamment par les adultes peu diplômés. Mais ces enjeux sociaux ne sont pas suffisants pour donner un statut théorique au concept de compétence. Il faut analyser les choses davantage en profondeur pour en prendre la mesure, et pour avancer des idées.

Je vais partir de plusieurs définitions complémentaires de la compétence et essayer de vous convaincre que la compétence n'est pas un concept suffisant, mais qu'il appelle au contraire des développements importants du côté de l'analyse de l'activité et des processus cognitifs.

Les définitions qui suivent sont d'abord pensées pour des individus. Elles peuvent s'appliquer également à des collectifs.

Définition 1 : *A est plus compétent que B s'il sait faire quelque chose que B ne sait pas faire.*
Ou encore A est plus compétent au temps t' qu'au temps t parce qu'il sait faire quelque chose qu'il ne savait pas faire.

Cette définition est une base solide mais excessivement réductrice. Le critère en est le résultat de l'activité. Peu importe comment A s'y prend, s'il sait souder des tôles de 1cm d'épaisseur que d'autres ne savent pas souder, s'il saute 6m au saut à la perche, s'il sait faire une division avec un diviseur décimal plus petit que 1, ou utiliser le théorème de Thalès.

Définition 2 : *A est plus compétent que B, s'il s'y prend d'une meilleure manière.*
Le comparatif "meilleure" suppose des critères supplémentaires : rapidité, fiabilité, économie, élégance, compatibilité avec la manière de procéder des autres, etc...

Cette deuxième définition conduit à s'intéresser à la forme de l'activité elle-même et pas seulement à son résultat. Par exemple : A utilise sans hésitation la règle de trois pour résoudre les problèmes de quatrième proportionnelle, alors que B ne parvient à les résoudre qu'en passant par le calcul préalable de la valeur unitaire.

Définition 3 : *A est plus compétent s'il dispose d'un répertoire de ressources alternatives qui lui permet d'utiliser tantôt une procédure, tantôt une autre, et de s'adapter ainsi plus aisément aux différents cas de figure qui peuvent se présenter.*

Pour calculer la durée nécessaire au parcours de 450 Km sur l'autoroute, alors qu'il a parcouru 90 Km en 45 minutes, A peut raisonner de plusieurs manières□

- considérer que 450 c'est 5 fois 90, et que le temps de parcours sera ainsi 5 fois plus grand, soit 45 minutes multiplié par 5.
- calculer la vitesse horaire□soit 90 multiplié par 60 puis divisé par 45, ce qui donne 120□, puis diviser ensuite 450 par 120 pour trouver la durée correspondante en heures.
- procéder à une décomposition additive du type :

45 minutes = 30 minutes +15 minutes, et de même 90 Km = 60Km+30 Km.

Cela permet de voir 450km comme une somme (60 + 60 + 60 + 60+ 60 + 60 + 60 + 30), ou encore comme la somme (7 x 60 + 1/2 x 60) et de déterminer la durée par la combinaison correspondante des durées en minutes.

Dans le premier cas A utilise, sans l'exprimer, la propriété d'isomorphisme des fonctions linéaires□$f(kx) = kf(x)$□

Dans le second cas il utilise, toujours sans l'exprimer, la formule avec le coéfficient de proportionnalité□$f(x) = ax$

Dans le troisième cas, il utilise, toujours sans le dire, l'isomorphisme additif

$f(x+x.....+x') = f(x) + f(x)+......+f(x')$

ou celui des combinaisons linéaires $f(kx+k'x) = kf(x) + k'f(x)$.

Définition 4 : *A est plus compétent s'il sait "se débrouiller" devant une situation nouvelle d'une catégorie jamais rencontrée auparavant.*

Par exemple A sait utiliser le théorème de Thalès lorsque les deux droites non parallèles entre elles se coupent sur la figure (figure A), et il se sert alors des propriétés de l’homothétie; si on lui présente un cas dans lequel les parallèles ne se coupent pas sur la figure (figure B), comme il ne peut plus utiliser les propriétés de l’homothétie, il utilise celles de la projection, qui sont plus délicates.

Figure A

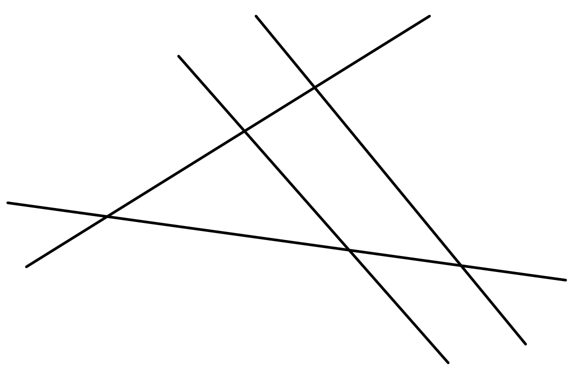
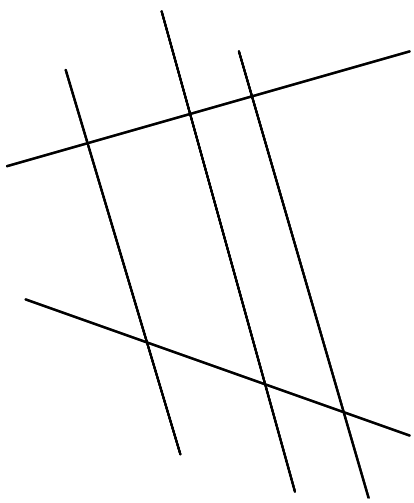


Figure B



Ces quatre définitions sont complémentaires. On ne peut se passer ni de l'une, ni de l'autre. Elles sont particulièrement importantes dans le travail aujourd'hui, parce qu'on demande aux hommes et aux femmes de plus en plus de diagnostic et de résolution de problème, c'est dire de jugement, d'analyse et d'intelligence; et ceci à tous les niveaux.

On n'est pas expert seulement parce qu'on a répété un grand nombre de fois le même geste ou le même raisonnement, mais aussi, parce qu'on est en mesure d'aborder et de traiter des situations nouvelles, jamais rencontrées auparavant.

En d'autres termes, l'expérience professionnelle repose non seulement sur la familiarité des situations rencontrées, mais aussi sur leur variété et leurs différences. Il faut à la fois savoir traiter certaines situations sans avoir besoin de réfléchir longuement, et en même temps être en mesure d'improviser une solution devant une situation tout à fait nouvelle. Cela est vrai pour les élèves aussi; et il faut donc gérer dans l'enseignement à la fois la stabilisation des compétences acquises et leur déstabilisation. Il faut déstabiliser les élèves; c'est le moyen didactique habituel pour provoquer la découverte ou la compréhension d'un concept ou d'un raisonnement nouveau. La limite de ce principe est que, si on déstabilise trop souvent les enfants, ils n'apprennent pas non plus.

Compétence, schème et concept

La compétence ainsi entendue, nous conduit à nous intéresser à l'activité elle même, et pas seulement à son résultat. L'expérience et l'apprentissage sont adaptation. La connaissance est adaptation, nous disait déjà Piaget, et il précisait : assimilation et accommodation.

Mais qu'est-ce qui s'adapte, et à quoi? Il est trop général de parler d'adaptation à l'environnement. Ce qui s'adapte ce sont des schèmes, et ils s'adaptent à des situations. Le couple schème-situation est donc le couple théorique central de la psychologie du développement et de l'apprentissage, de la didactique et de la pédagogie. Je rappelle donc brièvement mes quatre définitions du concept de schème, de la moins analytique à la plus analytique, puis à la plus formelle

1 *un schème est une totalité dynamique fonctionnelle.*
2 *un schème est une organisation invariante de l'activité pour une classe définie de situations.*
3 *un schème est nécessairement composé de quatre catégories de composantes*
- un but (ou plusieurs), des sous buts et des anticipations
- des règles d'action, de prise d'information et de contrôle
- des invariants opératoires, (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte)
- des possibilité d'inférences.

4 *un schème est une fonction qui prend ses valeurs d'entrée dans un espace temporalisé à n dimensions et qui produit ses valeurs de sortie dans un espace également temporalisé à n dimensions : n et n' étant très grands.*

C'est la définition 4 qui permet de se rapprocher de l'idée d'algorithme et de programme informatique, mais ce sont les trois premières définitions, notamment la troisième, qui permettent le mieux de comprendre le caractère fonctionnel, adaptatif et fondamentalement cognitif du schème.

Commentaires

L'idée de totalité dynamique fonctionnelle permet de voir le schème comme une "bonne forme" de l'activité, à la manière dont les gestaltistes voyaient eux mêmes l'organisation de la perception.

Mais Piaget s'est avancé dans la théorie plus loin que les gestaltistes, que Revault d'Allonnes, ou que Bartlett, en s'intéressant de près au déroulement temporel de l'activité gestuelle du bébé, puisqu'aussi bien c'est à l'analyse de cette activité gestuelle qu'on doit, chez Piaget, les premières descriptions convaincantes de ce qu'est un schème, de sa fonction assimilatrice, et de la coordination des actions qu'implique sa construction.

Le geste est le meilleur prototype du concept de schème. J'avance la thèse que la pensée est un geste, notamment la pensée mathématique. Il nous faut tirer le bénéfice de cette métaphore hardie.

Mon deuxième commentaire est que le schème est un universel, puisqu'il s'adresse à une classe de situations, fût-elle petite et locale (au début de l'apprentissage d'un domaine nouveau notamment). En effet, en toute rigueur il faut des quantificateurs universels pour formaliser l'analyse d'un schème. En même temps l'activité engendrée (la conduite observée notamment) présente une certaine variabilité, puisqu'elle dépend des conditions; ce qui est invariant c'est l'organisation de l'activité, pas l'activité elle-même. La plupart des schèmes n'engendrent pas des conduites stéréotypées.

Et même lorsque nous avons un sentiment d'automatisme, pour certaines de nos conduites ou pour celles des autres, il faut toujours considérer que l'activité cognitive sous-jacente est truffée d'inférences, peu accessibles à la conscience pour la plupart d'entre elles, mais qui n'en sont pas moins essentielles pour relier entre eux les éléments de l'activité. Les parties véritablement automatisées de nos conduites, dans lesquelles n'interviennent ni inférences ni contrôles, sont d'une exceptionnelle brièveté, et elles sont en outre intégrées dans l'organisation intelligente qu'est le schème.

Mon troisième commentaire est lié à l'analyse en termes de buts, de règles, d'invariants opératoires et d'inférences. Même si le but n'est pas pleinement conscient, ou s'il y en a plusieurs dans la même activité (par exemple la séduction dans une activité collective de travail), on peut toujours identifier une intentionnalité dans l'organisation de l'activité, avec son cortège de sous-buts et d'anticipations.

Les règles, elles, ont cette fonction théorique d'exprimer le caractère génératif du schème. Ce sont les règles qui permettent de saisir la manière dont l'activité est engendrée au fur et à mesure. Ce ne sont pas seulement les actions de transformation du réel qui sont ainsi engendrées, (la suite des gestes dans le saut à la perche ou la suite des écritures dans la résolution d'un système d'équations), mais aussi les prises d'information et les contrôles qui permettent l'infléchissement de la conduite en situation, y compris le retour en arrière si celui-ci est possible.

Les règles sont ainsi la composante du schème par laquelle entrent les conditions et les variations. On peut toujours leur donner la forme SI ALORS .Pourtant lorsqu'on demande à des ouvriers de talent, à des experts, à des enseignants et ou à des élèves d'expliquer pourquoi et comment ils ont fait ceci ou cela, leur réponse est généralement évasive sur les raisonnements conditionnels qu'ils ont bel et bien effectués en chemin. Ils ont tendance à restituer une suite linéaire d'actions : on fait ceci, puis cela, puis encore ceci, oubliant qu'à chaque moment, une ou plusieurs conditions ont présidé au choix effectué, notamment des prises d'information et des contrôles. Le concept de règle d'action de Newell et Simon est donc radicalement insuffisant pour analyser l'activité.

Si maintenant on essaye de comprendre quel type de relation existe entre les conditions de l'activité et les formes qu'elle prend, on rencontre inévitablement la question de la conceptualisation. Même s'il existe des régularités entre les conditions introduites par le SI et la conduite introduite par le ALORS (actions, prises d'information et contrôles) ce n'est pas le concept de succession régulière qui peut à lui seul permettre de saisir les raisons qui relient les différentes conditions possibles et les différentes activités qui leur sont associées. Il existe des relations conceptuelles entre conditions et activités.

C'est l'argument essentiel pour introduire dans le concept de schème cette composante épistémique que sont les concepts-en-acte et les théorèmes-en-acte. Le schème est conceptualisation ou il n'est pas. L'idée d'une connaissance dite “procédurale” qui serait détachée de toute conceptualisation est un avatar de l'associationnisme behavioriste, dont on n'a pas fini de mesurer les effets dévastateurs sur la psychologie et sur la didactique.

Avant d'aller plus loin, il me faut donner quelques exemples de schèmes.

Le schème du dénombrement

Un, deux , trois, quatre,... quatre!

Pour aller vite ne nous attardons pas sur le but : associer un nombre à une collection discrète. Je fais seulement remarquer au passage que le concept de nombre a deux propriétés : l'ordre et l'additivité. Cette dernière propriété est tranquillement ignorée par les chercheurs qui prétendent étudier les prémices du concept de nombre chez les bébés. C'est une grave faute théorique.

Dans le schème du dénombrement d'un enfant de 4 à 5 ans, on peut identifier au moins deux concepts mathématiques puissants : celui de correspondance biunivoque et celui de cardinal.

-correspondance biunivoque entre quatre catégories distinctes d'éléments : les objets à dénombrer, les gestes du bras et de la main, les gestes du regard, les gestes de la parole. Si l'une de ces correspondances n'est pas biunivoque, si le regard ou la parole vont trop vite ou trop lentement par exemple, le dénombrement est raté. C'est ce qui arrive aux jeunes enfants, et à certains enfants handicapés qui ont du mal à distribuer dans le temps la succession de leurs gestes, et à coordonner les différents registres concernés, notamment celui du regard.

-cardinal : un signe observable de ce concept-en-acte est la répétition du dernier mot-nombre, comme dans le cas ci-dessus. Mais certains enfants utilisent une autre marque linguistique, l'accentuation: *un, deux, trois, QUATRE!* On connaît les difficultés qu'ont certains enfants à cardinaliser : ils ne savent pas résumer l'information recueillie par le cardinal . En réponse à la question "*combien?* posée par leur interlocuteur, ils recommencent à compter l'ensemble. Ils savent moins encore utiliser cette information pour opérer des additions.

Une anecdote significative va ne permettre d'aller plus loin dans la démonstration du rôle de la conceptualisation dans l'organisation de l'activité de dénombrement. En 1997, les organisateurs de la coupe du monde de football ont cherché à repérer les stades qui, sur l'ensemble du territoire français, pourraient accueillir un grand nombre de spectateurs. Une personne autour de la table a suggéré le stade de Nantes; et le président du Comité a téléphoné le lendemain au directeur du stade de Nantes pour lui demander combien de places il y avait dans son stade. Le directeur a répondu qu'il l'ignorait; et il a alors chargé deux vacataires de compter les places du stade de Nantes.

Qu'ont fait ces derniers?. Evidemment ils ont dû utiliser un schème plus riche que celui de l'enfant de 5 ans.

1- Ils se sont partagés la tâche et ont utilisé ainsi un théorème fondamental:

$$\text{Card}\,(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}\,(B)$$

Chacun compte une partie, on fait la somme après, au lieu de compter le tout $A \cup B$ d'un seul coup.

2- Ils ont écrit les nombres sur un papier et utilisé l'algorithme de l'addition associé à la numération de position. Il est plus facile de faire l'addition de 869 et de 757 avec un crayon que de tête.

écriture (a+b) = écrit (a) **+**écrit (b)

+ signe de la somme
+ signe de l'algorithme

3- Ils ont pu économiser du temps, pour les parties rectangulaires du stade, en comptant les rangées et les places par rangée et en multipliant les deux nombres l'un par l'autre.
4- Enfin, dans les angles du stade (les virages), ils ont pu utiliser une technique économique en multipliant le nombre moyen de places par rangée par le nombre de rangées.

nombre moyen de places par rangée =
nombre minimum + nombre maximum divisé par 2

On peut même imaginer que l'un des deux partenaires n'ait pas été convaincu par ce dernier raisonnement, et ait décidé de recompter toutes les places du virage, “pour être sûr”.

Ainsi plusieurs connaissances sont venues enrichir le schème initial du dénombrement, sans que pour autant celui-ci perde ses droits et sa fonctionnalité (pour compter les rangées par exemple), et sans que ces théorèmes (en acte) fassent nécessairement l'objet d'une formulation explicite.

Je me contenterai de ces exemples pour justifier l'idée qu'il n'y a pas de schème sans conceptualisation, mais il est clair que cette thèse est encore plus fondée, pour l'analyse des schèmes de résolution des problèmes d'arithmétique élémentaire (structures additives, proportionnalité), d'algèbre, de géométrie.

Je remarque au passage que la conceptualisation n'est pas aisément visible dans les activités mathématiques des élèves, et qu'elle n'est jamais purement mathématique , en ce sens qu'elle ne concernerait que l'espace et le nombre. Les concepts d'état et de transformation, de grandeur, de relation, de réciproque, de composition, ne sont pas mathématiques au sens étroit du terme. Il n'en sont pas moins indispensables pour analyser les problèmes d'arithmétique élémentaire.

On peut même s'étonner que le temps et la durée ne jouent pratiquement pas de rôle dans l'épistémologie mathématique, alors que c'est une dimension incontournable de la conceptualisation des structures additives, puisque la relation *état initial / transformation / état-final* est un des prototypes des structures additives. De même la théorie mathématique des fonctions prend appui sur le cas prototypique des variations d'une grandeur ou d'une position en fonction du temps.

A ce point de mon exposé, je voudrais souligner un processus crucial de la démarche analytique; que j'appelle la descente vers le cognitif. Nous sommes en effet descendus de la compétence vers l'activité, puis des schèmes vers la conceptualisation. On peut résumer cette démarche dans une formule :

Au fond de l'action, la conceptualisation

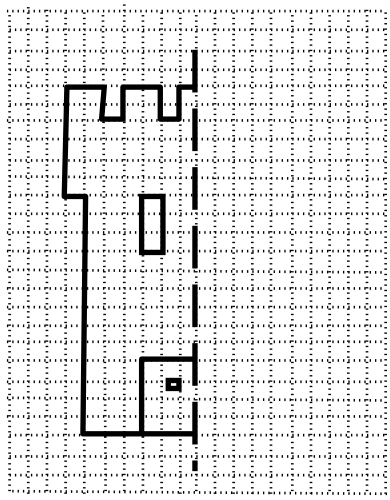
Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance

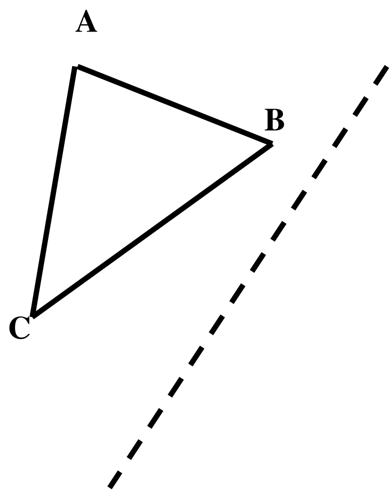
Nous n'avons parcouru qu'une partie du chemin. La suite naturelle du questionnement théorique concerne les relations entre la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance, notamment entre une règle, un théorème en acte et un théorème tout court. La complexité n'est pas que dans le faire, elle est aussi dans le dire. L'énonciation des objets et de leurs propriétés est essentielle dans les processus de conceptualisation. Parmi les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage des mathématiques, on peut mettre presque à égalité d'une part la complexité des classes de problèmes à résoudre et des opérations de pensée nécessaires pour les traiter, et d'autre part la complexité de certains énoncés et de certains symbolismes mathématiques.

Les mathématiques ne sont pas un langage, mais une connaissance. C'est un point sur lequel les idées ne sont claires ni chez tous les enseignants, ni chez les psychologues ni même chez certains mathématiciens. Cela ne signifie pas que les questions d'énonciation et de compréhension des énoncés ne jouent pas un rôle important.

Permettez-moi de reprendre un exemple que certains d'entre vous connaissent sans doute, mais qui a le mérite d'être facile à comprendre, et qui illustre parfaitement ce point.

Voici deux exemples d'exercices de géométrie qui jalonnent le développement des compétences au tournant de l'école élémentaire et du collège.





La première figure correspond à une situation qui est susceptible d'être proposée à des élèves de 8 à 10 ans, et dans laquelle il faut compléter le dessin de la forteresse par symétrie autour de l'axe vertical. La seconde correspond à une situation classiquement proposée en France à des élèves de 12 ans□construire le triangle symétrique du triangle ABC par rapport à d.

Dans le premier cas les difficultés gestuelles ne sont pas totalement négligeables parce qu'il faut tracer un trait juste en dessus du pointillé, ni plus haut, ni plus bas, et l'on sait que ce n'est pas si facile avec une règle□même chose pour le point de départ et le point d'arrivée du trait. Il existe aussi des règles conditionnelles□ par exemple "un carreau à gauche sur la figure déjà dessinée, un carreau à droite sur la partie à compléter", ou encore "deux carreaux vers le bas sur la partie gauche, deux carreaux vers le bas sur la partie droite", ou bien encore "un carreau à droite sur la figure de gauche, un carreau à gauche sur la figure de droite□ à partir d'un point de départ homologue du point de départ à gauche"

Ces règles ne sont pas trop complexes□elles n'en représentent pas moins plusieurs concepts-en-acte et théorèmes-en-acte concernant la symétrie et la conservation des longueurs et des angles. Comme dans ce cas tous les angles sont droits, la difficulté n'est pas très grande les concernant.

Dans la seconde figure, le tracé du triangle A' B' C' symétrique du triangle ABC par rapport à la droite d avec les instruments habituels du dessin (la règle, le compas, l'équerre...) est beaucoup plus complexe.

Déjà la réduction de la figure triangulaire à ses trois sommets, éléments nécessaires et suffisants pour le tracé du triangle symétrique, est une abstraction non négligeable pour certains élèves. Si l'on raisonne ensuite à partir des propriétés de la médiatrice AA' à construire, pour déterminer les points d'intersection sur la droite d'un cercle de centre A, afin de déterminer ensuite A', la conceptualisation est tout sauf triviale. On peut évidement utiliser l'équerre pour tracer la perpendiculaire à d passant par A, et reporter la distance entre A et la droite d, de l'autre côté de d pour déterminer A', mais ce n'est pas non plus si trivial de penser cette distance, en l'absence de tout tracé au départ. Ainsi la forme opératoire des connaissances concernant la symétrie est sujette à un développement important entre l'école élémentaire et l'école secondaire.

Ce que je veux montrer maintenant, c'est que les formes prédicatives des connaissances sur la symétrie sont également sujettes à des ruptures importantes. Les quatre énoncés suivants permettent de le montrer.

1 *la forteresse est symétrique*

2 *le triangle A'B'C' est symétrique du triangle ABC par rapport à la droite d*

3 *la symétrie conserve les longueurs et les angles*

4 *la symétrie est une isométrie*

Entre l’énoncé 1 et l’énoncé 2, il existe déjà un certain saut qualitatif : l’adjectif “*symétrique*” passe du statut de prédicat à une place, à celui de prédicat à trois places:

$$S(f) \longrightarrow S(A'B'C', ABC, d)$$

Entre l’énoncé 2 et l’énoncé 3, le prédicat “*symétrique*” est transformé en objet de pensée, doté à son tour de propriétés : celles de conserver les longueurs et de conserver les angles. L’opération linguistique de nominalisation est l’un du moyens habituels de cette transformation des prédicats en objets (ou encore de transformation des fonctions propositionnelles en arguments). En effet dans les énoncés 1 et 2, l’idée de symétrie “S” est prédicat ou fonction propositionnelle; dans l’énoncé 3, elle est devenue objet (ou argument). Nous la notons “s” conformément au symbolisme habituel des logiciens: la conservation des longueurs et des angles est une propriété de la symétrie.

$$\boxed{\begin{array}{l} S(f) \\ \qquad\qquad\qquad \longrightarrow Cl(s) \text{ et } Ca(s) \\ S(A'B'C', ABC, d) \end{array}}$$

Quand on passe à l’énoncé 4, une nouvelle transformation est effectuée : la conservation des longueurs et des angles est devenue à son tour un objet, l’isométrie.
Et une relation d’inclusion est affirmée entre l’ensemble des symétries et l’ensemble des isométries

$$S \subset I$$

La signification du *la* de “*la symétrie*” dans les énoncés 3 et 4 est celle d’un quantificateur universel. La signification du *la* de “l*a forteresse*” ou de “*la droite d*” dans les énoncés 1 et 2 est celle d’un déictique et d’un singulier : cette forteresse-là, cette droite-là. La relation entre signifiés et signifiants n’est pas biunivoque, en tous cas au niveau des mots.

Les textes mathématiques, les textes scientifiques et techniques, et plus généralement les textes élaborés (philosophie et littérature) fourmillent de ces variations de signification.

On peut aisément imaginer ce que l’accumulation de ruptures dans les formes opératoires et dans les formes prédicatives des connaissances mathématiques peut engendrer de difficultés pour les élèves. Les enseignants sont trop faiblement avertis de ces ruptures.

Ce que montrent ces exemples, c'est que la conceptualisation est une condition de l'énonciation. En retour l'énonciation apporte à la conceptualisation une contribution décisive. Par exemple serait-il aussi facile, sans l'énoncé 2, de penser la relation à trois termes qui lie la droite d et les deux triangles? Sans l'opération linguistique de nominalisation.serait-il seulement possible de penser la symétrie et l'isométrie comme des objets de pensée? Probablement pas□Le langage a cette vertu exceptionnelle, par rapport à la perception et à l'action, de permettre de faire référence à des objets absents ou imaginaires, de faciliter l'analyse des situations et des configurations en termes de prédicats et d'objets, de permettre la distinction entre énoncés universels et énoncés particuliers.

Prenons d'autres exemples, aussi simples que possible, pour illustrer d'autres idées importantes, concernant les formes symboliques. Soit le problème suivant :

André a joué deux parties de billes et il cherche à reconstituer combien il avait de billes au départ, avant de jouer. Il compte ses billes et trouve 63 billes. Il se souvient qu'il a gagné 16 billes à la première partie et perdu 8 billes à la seconde. Combien avait-il de billes avant de jouer?

La compétence nécessaire pour résoudre ce problème est acquise, selon les enfants, au cours des deux dernières années de l'école élémentaire ou des deux premières années du collège. Il y a comme vous le savez une grande variabilité interindividuelle.

Il existe plusieurs schèmes de raisonnement possibles. Sans entrer dans trop de détails, on peut exprimer les règles relatives à certains d'entre eux.

schème 1 : *partir de l'état final, ajouter ce qui a été perdu et soustraire ce qui a été gagné.*

schème 2 : *faire une hypothèse sur l'état initial, appliquer les transformations successives; comparer le résultat ainsi obtenu à l'état final donné dans l'énoncé, corriger l'hypothèse en fonction de l'écart entre les deux.*

schème 3 : *composer les deux transformations pour savoir si au total, André a gagné ou perdu des billes, et combien. Appliquer à l'état final la transformation réciproque de cette transformation composée.*

Les théorème en acte sous-jacents à ces schèmes ne sont pas exactement les mêmes. Le schème 1 repose sur un théorème général, qui peut être exprimé ainsi :

$$\boxed{F = T(I) \quad \longrightarrow \quad I = T^{-1}(F)}$$

I = état initial, T = transformation directe, F = état final

T^{-1} = réciproque de la transformation directe

Cette connaissance en acte permet une économie considérable par rapport au schème 2 qui consiste à poser une hypothèse sur l'état initial, puis à la corriger après. Mais le schème 2 n'en suppose pas moins un raisonnement non trivial, qui s'appuie également sur des théorèmes, que je formaliserai de la manière suivante :

F = état final donné
H = hypothèse sur l'état initial
F_h = état final obtenu après application des deux transformations à l'hypothèse,

si $F_h = F$ l'hypothèse est bonne ; on la retient

si $F_h > F$ $\quad\quad$ $I = H-(F_h-F)$
si $F_h < F$ $\quad\quad$ $I = H+(F-F_h)$

. Le schème 1 est plus rapide et plus économique que le schème 2 : il s'appuie sur un théorème plus puissant. Il n'y a pas d'action sans théorème en acte, c'est-à-dire sans proposition tenue pour vraie sur le réel. Un progrès conceptuel permet en général d'économiser des opérations plus laborieuses.

Concernant le symbolisme, je veux encore soulever trois questions :

1 La question de la généralité

Le diagramme ci-dessous n'est pas adéquat seulement pour des billes gagnées ou des grandeurs croissantes: ($T > 0$ et $T^{-1} < 0$) ; il est aussi adéquat pour des pertes ($T < 0$ et $T^{-1} > 0$), et des grandeurs décroissantes.

$$\begin{tikzcd} \boxed{T} \arrow[r, shift left, "T"] & \boxed{F} \arrow[l, shift left, "T^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Il n'est pas pertinent seulement pour les augmentations et diminutions des quantités et des grandeurs ; il l'est également pour des déplacements en-avant et en arrière, ainsi que pour l'algèbrisation de la droite numérique et l'élaboration des relations de Chasles. Il est encore pertinent, moyennant des précautions, pour certains aspects de la multiplication et de la division, et pour des fonctions plus complexes.

2 La question de l'économie et de l'efficacité

Par économie, il faut entendre qu'un diagramme comme celui-ci est très économique par rapport à tous les commentaires en langage naturel qui permettraient d'en dire autant. En d'autres termes le diagramme permet de ne retenir que ce qui est essentiel, et de taire ce qui ne l'est pas. C'est le propre de la conceptualisation de ne retenir que ce qui est caractéristique d'un objet, d'une propriété, d'un processus.
Un concept est toujours réducteur par rapport aux expériences singulières auxquelles il se rapporte.

3 La question des rapports entre symbolismes mathématiques et langage naturel

Je ferai deux remarques préalables

1 - Le langage naturel est lui-même réducteur puisque le mot renvoie toujours à un ensemble soit d'objets, soit de propriétés, soit de processus. L'invariant langagier est plus réducteur que l'invariant opératoire. C'est sa faiblesse et sa force en même temps :

- sa faiblesse parce qu'il ne rend qu'imparfaitement compte de la pertinence et de la finesse du jugement sous-jacent à l'action.
- sa force parce qu'il est communicable et que sa signification peut être partagée, au moins partiellement; également parce qu'il stabilise les invariants opératoires dans des formes conventionnelles pour une communauté donnée.

2 - Aucun diagramme, aucun symbolisme non langagier, aucune algèbre ne peut remplir sa fonction sans un accompagnement langagier, fût-il intérieur. En d'autres termes le langage naturel est le métalangage de tous les symbolismes. C'est bien entendu des situations, des phénomènes et du langage naturel que les symbolismes mathématiques tirent leur sens. Mais ils apportent, du fait de leur laconisme notamment, une efficacité que n'a pas le langage naturel.

Cette efficacité est maximale dans l'algèbre. Le problème est que les symboles algébriques, recouvrent une grande variété de sens, et que l'accès à l'algèbre n'est probablement possible, pour la majorité des élèves, que s'ils passent pendant une période par des représentations prè-algébriques : le diagramme sagittal vu plus haut en est un exemple. Dans tous les cas c'est grâce à des commentaires en langage naturel que ces symbolismes peuvent remplir leur rôle.

Si l'on revient maintenant à la question de la compétence, on voit que celle-ci peut se décliner de plusieurs manières: les critères de compréhension d'un énoncé de problème peuvent en effet se situer à plusieurs niveaux:

- conduire une suite d'opérations de pensée, permettant de traiter le problème sans passer par l'algèbre;
- lui associer le schème le plus général ou le plus efficace du point de vue de l'arithmétique ordinaire;
- écrire le système d'équations correspondant et le résoudre;

- en tirer un diagramme non nécessairement algébrique mais susceptible de favoriser la résolution.
- inventer un autre énoncé de problème ayant la même structure, c'est à dire pouvant être représenté par le même diagramme ou la même équation...etc.

.

Dans le même ordre d'idées, je voudrais présenter des exercices d'évaluation que nous avons introduits dans un ouvrage destiné aux enseignants de cycle trois en France: 3éme, 4éme et 5éme primaire (Vergnaud et al, 1997).

Le concept de champ conceptuel s'applique à la géométrie d'une manière un peu plus complexe qu'a l'arithmétique ou à l'algèbre élémentaire. La raison principale en est que les trois grands domaines d'expérience de l'espace dans lesquels la géométrie prend sa source sont profondément interdépendants :

- la géométrie des figures
- la géométrie des positions
- la géométrie des transformations.

Il est bien difficile de construire des situations et d'élaborer des exercices relevant de la géométrie des figures, sans toucher en même temps la question des positions relatives et la question des transformations. De même il n'y a pas de géométrie des transformations sans figures et sans positions.

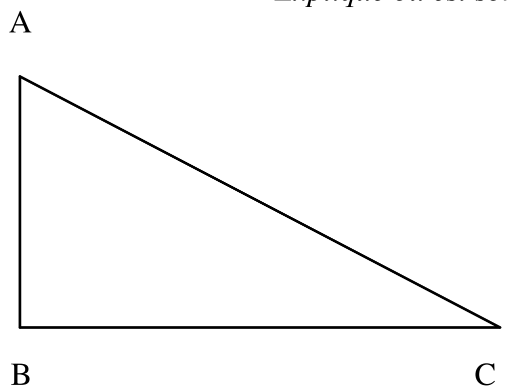
Dans un outil d'évaluation, il faut donc essayer de dissocier, partiellement au moins,.les compétences distinctes qui interviennent ensemble dans un exercice de géométrie.

Voici trois exemples d'exercices, que j'ai choisis justement parce qu'ils sont relativement contrastés, du point de vue de ce qui est demandé aux élèves.

EXEMPLES DU MONITEUR GEOMETRIE

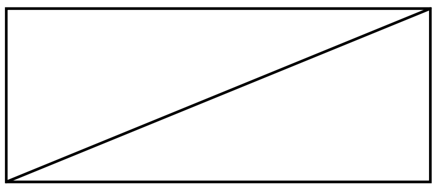
Exemple 1

Tu dois dessiner un cercle passant par les trois sommets A, B, C de ce triangle. Explique où est son centre et comment tu traces le cercle.



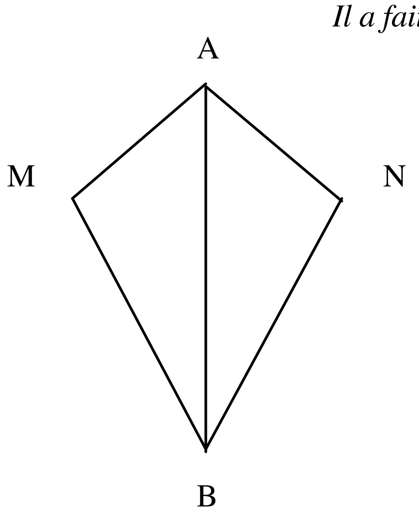
Exemple 2

Décris cette figure à un camarade qui ne la voit pas



Exemple 3

Un élève a écrit que cette figure a deux axes de symétrie: la droite AB et la droite MN.. Il a fait une erreur: laquelle? Explique pourquoi.



Conclusion :

Ma conclusion sera volontairement générale, peut être abusivement générale. Mais il me faut essayer de montrer que ce qui est pertinent en mathématiques est également pertinent pour d'autres domaines de l'activité humaine.

Tous les registres de l'activité sont concernés par le cadre théorique des schèmes, des champs conceptuels et des relations signifiants/signifiés.

Les gestes de l'artisan, du sportif et de la danseuse, les raisonnements scientifiques et techniques de l'ingénieur, du technicien de maintenance, du médecin et de l'avocat, les formes énonciatives et discursives des uns et des autres, l'interaction avec autrui et les compétences affectives sont tous et toutes des formes d'organisation de l'activité.

Le concept de schème est donc pertinent pour entreprendre leur analyse. Ceci ne signifie pas que ce soit aisé.

Voici des exemples pris aux deux extrémités de la qualification reconnue aujourd'hui dans les entreprises

Des ergonomes étaient chargés d'étudier les postes de travail d'un abattoir de porcs, en vue de la modernisation de celui-ci. Le jour où ils remettent leurs rapport au directeur de l'abattoir, ils lui font remarquer qu'on ne leur a pas demandé d'étudier le poste du porcher à l'entrée de l'abattoir, là où les porcs sortent du camion qui les transporte.

Le directeur répond que cela "ne valait pas la peine", que ce travail "n'était pas sorcier", et que peut être la personne, qui était là depuis 15 ans, rénumérée au tarif le moins élevé de l'entreprise, ne se retrouverait probablement pas dans la nouvelle organisation du travail.

Les ergonomes insistent, et obtiennent d'étudier l'activité du porcher. Ils découvrent alors que c'est une personne dont les compétences sont peut-être le plus critiques de toute l'entreprise. En effet, les porcs sont cardiaques, arrivent stressés, et peuvent mourir avant même d'être placés sous le couteau du boucher. Même s'ils ne meurent pas, la viande stressée est reconnaissable par les acheteurs et vaut moins cher sur le marché. Or ce porcher avait développé des schèmes très subtils pour détecter les porcs présentant des signes de souffrance, pour les séparer calmement et gentiment des autres avec son bâton, et les conduire en priorité vers l'endroit fatidique. Il prenait les indices pertinents sur le comportement des animaux, à la lumière de sa longue expérience, et parvenait ainsi à une performance que le directeur de l'abattoir, si on l'avait mis à la place du porcher, n'aurait évidemment pas pu atteindre.

Ce porcher n'était guère en mesure d'expliciter les indices qu'il prenait, ni les raisons des différents gestes qu'il savait faire pour calmer les porcs stressés. Ce décalage entre les connaissances opératoires et leur formulation est un phénomène très général. Il concerne par exemple les ouvriers et les techniciens de maintenance, qui ont une longue expérience des cas de panne qui peuvent se présenter, et de leur variété. Leur diagnostic repose sur des indices que d'autres ne savent pas prendre, et leur savoir faire n'est pas aisément transmissible. Témoin ce réparateur de pompes à eau dans une entreprise de fabrication et de livraison de béton. Il tombe malade pour plusieurs semaines et personne dans son service ne parvient à réparer une certaine catégorie de pannes relativement délicates des pompes à eau qui arrivent pour réparation. On se rend à son chevet pour lui demander comment il s'y prend. Il tâche d'expliquer, les autres de comprendre. En vain! c'est seulement à son retour à l'atelier que les pannes les plus délicates ont pu être traitées à nouveau.

Il est tentant de croire que ce décalage entre forme opératoire et forme prédicative est le fait des personnes les moins qualifiées.

Mais j'ai pu observer ce décalage chez des ingénieurs de très haut niveau, experts dans la conception des lanceurs spatiaux Ariane. On les avait chargés d'écrire des guides méthodologiques dans lesquels ils restitueraient leur savoir faire personnel, acquis au cours de leur expérience propre, en vue de sa transmission aux jeunes ingénieurs, et de la capitalisation de ces compétences par l'entreprise. Je me suis aperçu, en interrogeant les experts et les jeunes ingénieurs, que les guides méthodologiques d'une part donnaient lieu à une grande variété d'interprétations de ce qu'est un savoir-faire personnel, et d'autre part ne restituaient qu'une faible part des compétences des experts et des connaissances qu'ils utilisent dans l'action (qui est je le rappelle une action de conception). Dans les guides méthodologiques les experts ne donnaient qu'une vision séquentielle de leur manière de faire, avec peu d'alternatives et peu de raisonnements conditionnels, alors que c'est justement ce type de raisonnement qui fait leur expertise: la solution optimale d'un problème technique est en effet liée aux conditions particulières dans lesquelles il se présente. Les experts faisaient également peu état des comparaisons de type coût / efficacité, qui sont essentiels dans la pratique. Il ne parlaient pas non plus des obstacles épistémologiques et des raisonnements boîteux qu'ils avaient dû et pu surmonter au cours de leur activité, et qui sont évidement une source précieuse d'information pour les jeunes ingénieurs.

En bref, qu'on soit porcher ou ingénieur de conception, il est difficile de mettre en mots les connaissances qu'on utilise dans l'action.

On imagine dans ces conditions que les compétences collectives d'un groupe de travail, d'un service, d'un département, ou d'une entreprise, peut difficilement être décrite et analysée. Non seulement la compétence collective d'un groupe est davantage que la somme des compétences des membres du groupe, mais la combinaison entre elles de ces compétences individuelles ne peut pas être complètement assurée par les seuls échanges verbaux, écrits ou oraux. La pratique commune est essentielle dans la formation de la compétence collective, comme dans la formation de l'expertise individuelle.

Que l'expérience soit incontournable dans la formation de la compétence n'est pas une découverte. Ce qui est plus nouveau c'est l'analyse cognitiviste de l'activité, c'est-à-dire l'identification des formes stables d'organisation de l'activité (les schèmes), face à des situations d'une certaine variété; ainsi que l'analyse des relations entre elles de différentes situations, qu'on peut ainsi classer. Ce sont ces différentes classes de situations et le réseau des concepts qui permet de les traiter que j'appelle champ conceptuel.

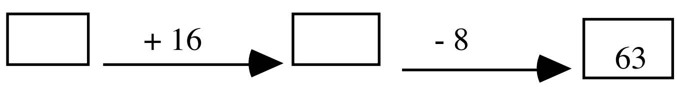
Si les schèmes ne sont pas des stéréotypes, mais sont au contraire flexibles, c'est justement parce qu'ils reposent sur des invariants opératoires (conceptuels et propositionnels) qui tirent leurs sens et leur pertinence d'une variété de situations.

Ceci me conduit à une deuxième partie de ma conclusion. La distinction entre vérité et pertinence est plus facile à penser depuis que Russel, à la suite de Frege, ait distingué entre proposition et fonction propositionnelle :

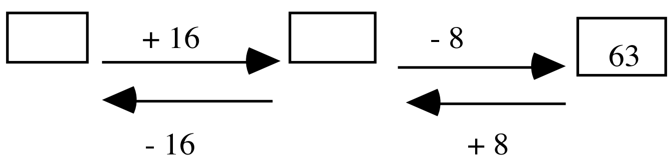
Une proposition est susceptible de vérité ou de fausseté, pas une fonction propositionnelle, faute d'être saturée. Un exemple simple peut être donné avec des énoncés algébriques : $4 + 3 = 7$ et $4 + 3 = 8$ sont des propositions, l'une vraie l'autre fausse; $x + 3 = 8$ n'est pas une proposition mais seulement une fonction propositionnelle, parce qu'elle n'est pas saturée et qu'elle n'est vraie que sous la condition de donner à x une certaine valeur.

Les schèmes pré-algébriques qu'on peut utiliser pour représenter les relations additives ou multiplicatives en vue de favoriser un raisonnement sont des fonctions propositionnelles non saturées, comme les équations.

Pour le problème des billes vu plus haut



L'intérêt didactique de ces schémas est à la fois dans leur laconisme et dans leur capacité à représenter le lien entre les relations pertinentes et le raisonnement nécessaire à la solution par les propriétés du signifiant graphique et spatial.



Les raisonnements en langage naturel sont, comme les énoncés de problème, beaucoup plus foisonnants. Il n'est pas rare qu'un énoncé en langage naturel exprime un prédicat à 4, 5 ou 6 places, le raisonnement utile à l'avenant.

La conceptualisation est un moyen de réduire l'information à ce qui est nécessaire et suffisant pour comprendre et traiter une situation d'une certaine classe. Le symbolisme permet justement de représenter cette information et seulement celle là.

Ainsi les propriétés graphiques des diagrammes sont une aide à la conceptualisation, au moins pendant une période de l'apprentissage. Lorsque les relations sont bien comprises, les diagrammes deviennent inutiles. A l'inverse, il faut un minimum de conceptualisation des grandeurs et des relations en jeu pour lire et comprendre les diagrammes d'une certaines catégorie. On ne peut pas donc pas confondre conceptualisation et représentation symbolique, même lorsque cette dernière est pertinente.

Cette remarque me conduit pour terminer à distinguer plusieurs sens complémentaires du concept de représentation :

le flux de la conscience:
il se manifeste en chacun de nous à travers la perception et l'imagination. Si la conceptualisation est, par définition, l'identification des objets du monde et de leurs propriétés et relations, alors la perception contribue à la conceptualisation, bien évidemment. En même temps, il existe des objets de pensée qui ne correspondent directement à aucune perception, mais résultent de la mise en relation d'un ensemble complexe de phénomènes observables. C'est la cas de nombreux concepts scientifiques, parmi les plus puissants, comme ceux de force, d'évolution, de gène, d'inconscient.
On ne peut sous-estimer le rôle de l'imagination dans la conceptualisation. C'est le critère incontournable de la valeur épistémologique du constructivisme.

Le système d'invariants opératoires
Il s'agit du système de concepts-en-acte et de théorèmes-en-acte qui permet de penser le réel et d'agir. Les concepts se développent dans l'action et sous tendent les formes d'organisation de l'activité que sont les schèmes. Il n'y a pas d'action possible sans propositions tenues pour vraies sur le réel. Ce sont justement ces propositions tenues pour vraies que j'appelle théorèmes-en-acte, y compris pour d'autres domaines d'activité que les mathématiques. Leur portée est souvent locale (elle l'est toujours dans la phase d'émergence); ils peuvent rester implicites; ils peuvent même être faux.

Les systèmes de signifiants/signifiés
Leur rôle est évidemment immense chez l'homme. Tout à la fois ces systèmes prennent appui sur les invariants opératoires, et les confortent en retour en les exprimant. La

communication entre deux interlocuteurs est bonne si les systèmes d'invariants opératoires de l'un et de l'autre correspondent bien aux signifiés de la langue avec laquelle ils communiquent. Ce n'est pas toujours le cas, ni dans le travail, ni dans l'éducation. On ne peut donc confondre invariants opératoires et signifiés de la langue. Ce décalage est plus brutal encore pour les représentations symboliques comme l'algèbre, les graphiques, les diagrammes et les symbolismes de toute sorte inventés par les mathématiciens et les autres scientifiques.

Le système des schèmes qui organisent l'activité

Au bout du compte la représentation n'est ni un dictionnaire, ni une bibliothèque, mais un ensemble hiérarchisé de formes d'organisation de l'activité. Ces formes sont intériorisées et évocables par les situations rencontrées. Ce sont elles qui, en dernier ressort, sont responsables de la perception , de l'action, et de l'imagination.

Les invariants opératoires sont des constituants essentiels des schèmes, mais ils n'en épuisent pas le contenu, notamment à cause du rôle essentiel, dans le fonctionnement des schèmes, des buts, des règles, et des inférences.

Me voici parvenu à la fin de mon exposé. Je laisserai de côté les autres exemples que j'avais préparés et je m'en tiendrai pour conclure à la compétence professionnelle des enseignants.

Les enseignants sont des médiateurs. Leur premier acte de médiation est les choix des situations à proposer aux élèves. Ce choix s'alimente à la fois à l'épistémologie du domaine mathématique concerné et à la connaissance du développement des élèves, dans leur diversité. Il faut en effet viser cette marge du développement potentiel qu'évoque Vygotski dans son célèbre ouvrage, *Pensée et langage*. Mais le travail de médiation de l'enseignant ne s'arrête pas au choix des situations les plus fécondes et les plus opportunes : il lui faut clarifier les buts et les sous buts de l'activité, aider les élèves à anticiper et à faire des conjectures, prendre à sa charge une partie du travail, de manière à soulager les élèves de certaines difficultés et à diminuer leur marge d'incertitude. Il lui faut encore accompagner les élèves dans l'identification des relations pertinentes et dans les inférences qui leur permettront d'agir.

Bref il lui faut s'intéresser aux différentes composantes du schème qu'il souhaite voir émerger chez les élèves.

Brève bibliographie

BARTLETT, F. (1932). *Remembering : a study in experimental and social psychology*. New York & London : Cambridge University Press.

FREGE G. (1884, 1969 édition française) *Les fondements de l'arithmétique*. Paris, Editions du Seuil.

FREGE G. (1971,édition française) *Ecrits logiques et philosophiques*. Paris, Editions du Seuil.

PIAGET, J. (1936). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant* (Edition de 1994). Lausanne-Paris, Delachaux et Niestlé.

REVAULT D'ALLONNES, G. (1920,1999). Le mécanisme de la pensée: les schèmes mentaux; *Revue philosophique,* XC, 161-202. Repris dans *Psychologie française*,2000,45

VERGNAUD, G. (1985). Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychologie Française*, 30 3/4, 245-252.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 2/3, 133-17O.

VYGOTSKI, L. S. (1934/1985). *Pensée et langage*. Paris, Editions Sociales.